FLATLANDIA:
UN INVITO AL DIALOGO ATTRAVERSO Il PROBLEMA DI OTTOBRE 2002

Maria Cantoni *

1. Premessa
   Alcune riflessioni sul problema di Flatlandia, Ottobre 2002 (e più in generale su molti altri precedenti e seguenti), mi hanno portata a considerare gli "invii mensili", forse anche perché imprevedibili come contenuto, molto stimolanti per le riflessioni culturali e didattiche a cui mi hanno portato. Mi sono domandata allora se, al di là della risoluzione richiesta agli studenti, essi sarebbero potuti divenire **filo conduttore** di scambio di opinioni e di ricerca per noi insegnanti, prendendo anche in considerazione i modi, certamente diversi, con cui gli studenti richiedono il coinvolgimento del docente.

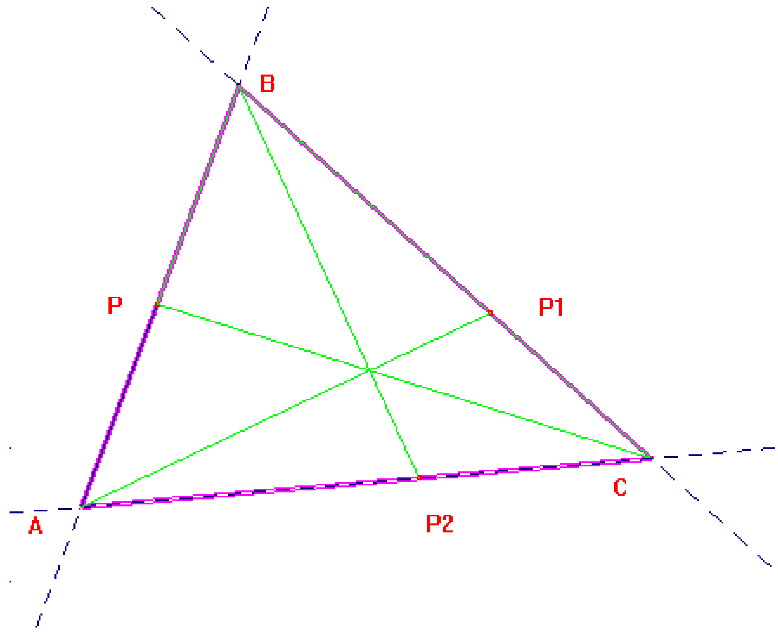
2. Le riflessioni.
   Mi sono posta a risolvere il problema di CabriFlatlandia con curiosità perché mi è capitato in altri casi che lo svolgimento mi abbia dato suggerimenti didattici originali vuoi per l'argomento trattato, vuoi per lo strumento Cabri usato per il lavoro grafico. Senza ribadirlo altrove, ritengo che la flessibilità dello strumento usato abbia determinato gli spunti didattici, del tutto teorici per ora, che il problema mi ha suggerito.

Problema

a) In un qualunque triangolo ABC, costruire sul lato AB un punto P in modo che i triangoli PCA e PCB abbiano ugual perimetro. Giustificare la costruzione.
b) E' unico il punto trovato?
c) Ripetendo la costruzione sugli altri due lati di ABC si può osservare un fatto "notevole", di cui non si chiede la dimostrazione. Qual è?

Tralascio il lavoro risolutivo relativo ai primi due punti che invitano, gli studenti della scuola media inferiore soprattutto, a meditare proficuamente sulla situazione (molto interessanti, credo, sarebbero le cose da dire a questo proposito)

Per quanto riguarda il terzo punto, il disegno suggerisce immediatamente l'intersezione dei tre segmenti in gioco.

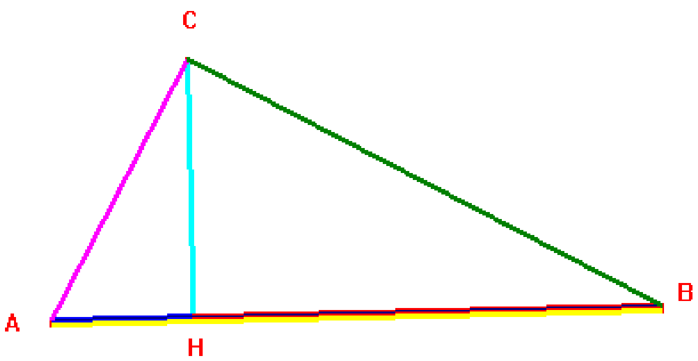


Tutto potrebbe finire qui, ma un triangolo rimanda inevitabilmente
a. ad altre problematiche sui triangoli
b. alla metodologia di lavoro (lavoro di ricerca, di costruzione della conoscenza)
c. alla possibilità di usare il problema stesso come stimolo per approfondimenti

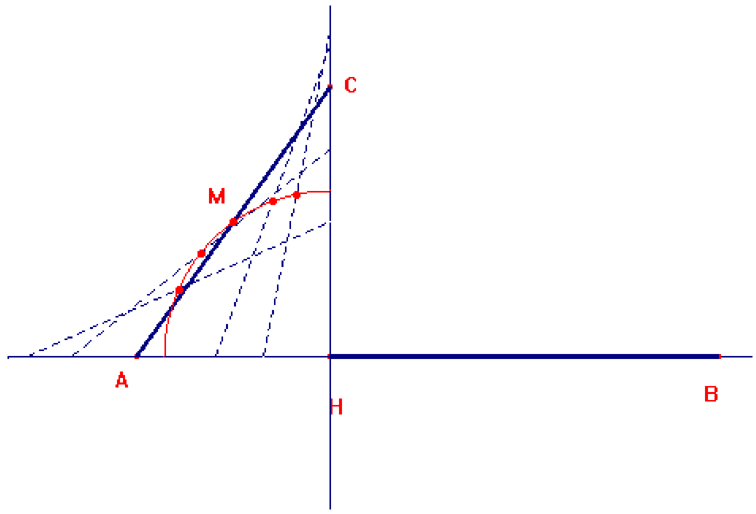
a. e b.

Brevi cenni metodologici attraverso esempi (gli allievi come protagonisti della ricerca attraverso discussioni ed analisi di situazioni. Potrebbero essere a questo proposito utili i laboratori nei quali tentare nuove metodologie di lavoro?):

I. I Teoremi di Euclide come scoperta attraverso l'esplicitazione di **informazioni** relative ai triangoli rettangoli: (proposta che può avere luogo già alla fine della scuola media inferiore) segmenti e loro misure:



Conosciuta una coppia di segmenti tra quelli evidenziati (AC, AB, BC, CH, AH, HB) essa è sufficiente, come informazione, per disegnare, a meno di isometrie, il corrispondente triangolo rettangolo, se si tralasciano le coppie "simmetriche" AC, HB e CB, AH.
Un breve cenno su queste ultime: con Cabri è possibile esplorare la situazione in modo particolarmente efficace.

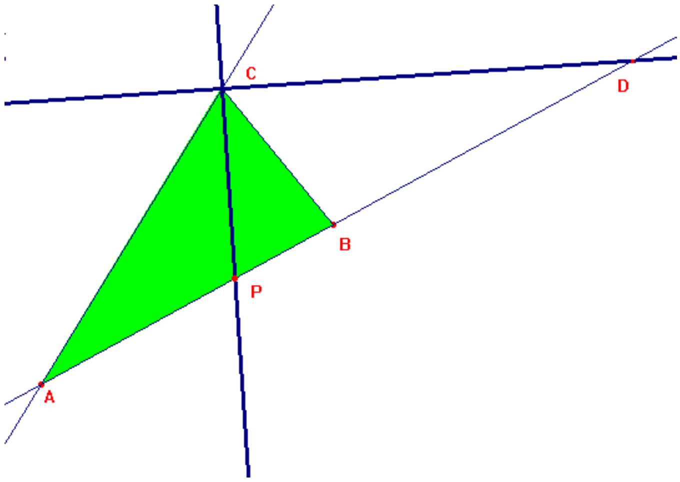


Già in terza media si potrebbe arrivare a capire la differenza di contenuto informativo di tali coppie rispetto alle altre e scoprire il luogo dei punti M, come a livello superiore andare, per esempio, verso la trigonometria.
Ritornando alle coppie possibili, se accanto alla costruzione grafica analizzo anche la possibilità di ricavare la misura di tutti gli altri segmenti che ho evidenziato (sempre a partire dalla coppia che uso per la costruzione), noto che l'uso del Teorema di Pitagora non è sufficiente per risolvere il problema.
Partendo dalla considerazione che la risoluzione di un problema è implicita nelle informazioni che posseggo, non mi posso che fare una domanda. Ho trascurato qualche cosa?
Analizzando meglio scopro che, accanto al triangolo iniziale, vi sono altri due triangoli simili al precedente. Se esprimo le relazioni che intercorrono tra i lati corrispondenti dei suddetti triangoli vengo ad avere, tra le altre, due proporzioni interessanti che mi portano direttamente a scoprire ciò che nei libri è dimostrato come Teoremi di Euclide.
A questo punto posso completare il lavoro che mi ero proposta.

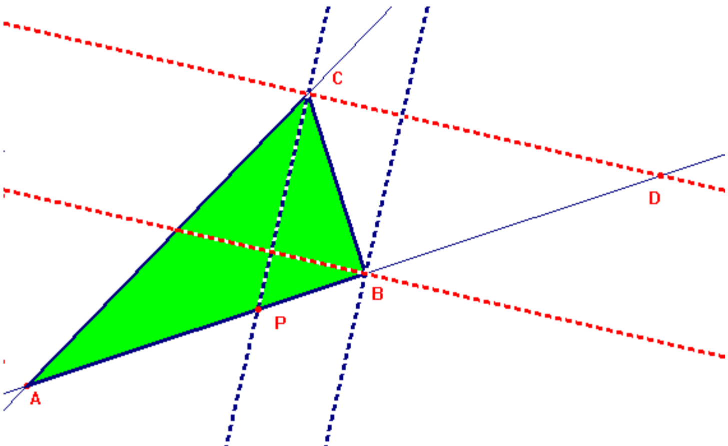
Un'analisi appropriata e le conoscenze già raggiunte sono stati strumenti di nuova conoscenza.

II. Le bisettrici degli angoli di un triangolo.

Esse dividono internamente ed esternamente il lato opposto in parti proporzionali agli altri due lati. Come arrivarci?



Il disegno con Cabri rende evidente l'angolo retto e la variabilità della situazione. **Forse si potrebbe aggiungere qualche suggerimento con la conseguente variabilità non casuale delle misure in gioco. Si porterebbe in tal caso la suggestione della misura nel rapporto con una realtà "virtuale" così come avviene con la realtà concreta e nello stesso tempo si potrebbe efficacemente evidenziare la necessità di superarne il limite.**
Resa così visibile una situazione di proporzionalità, potrebbe essere usato lo strumento già sperimentato dei triangoli simili?

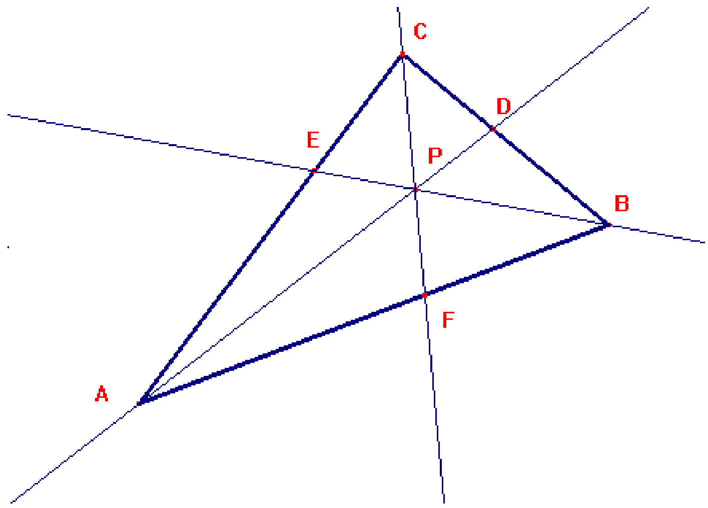


Quindi dai triangoli simili in evidenza ai triangoli simili da "catturare" !…..Il Cabri, incomincia ad esaltare suggerimenti!

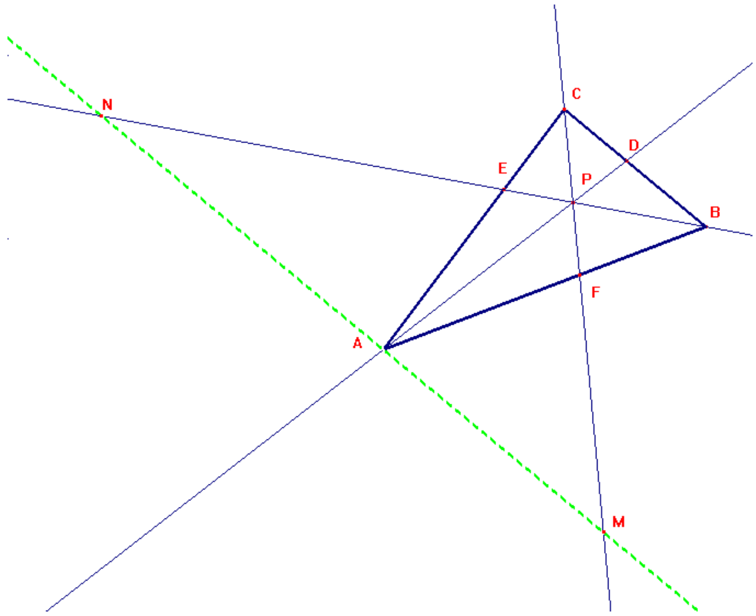
(Con un approfondimento neppure tanto audace, tutto ciò potrebbe portare al birapporto armonico dei punti ABPD che può essere richiamato in seguito in situazioni più avanzate.)

III. Verso il Teorema di Ceva.

Tracciate le tre bisettrici si potrebbe poi anche vedere (indipendentemente dal fatto che esse si incontrino o no in uno stesso punto) che, considerati i tre rapporti (relativi ai tre lati) del tipo AP/PB, il loro prodotto porta ad 1! Parallelo con le mediane…e ritorno alla scoperta empiricamente raggiunta **dell'invariante della situazione: i tre segmenti si incontrano in un punto!**
Possiamo scoprire una relazione generale partendo dall'invariante?
Non credo che con una discussione (soprattutto se gli studenti sono abituati a porsi "problemi") sia difficile ribaltare la situazione. Consideriamo per esempio un punto P interno ad un triangolo e proiettiamolo da ogni vertice sui lati opposti.



"Manipoliamo" la figura con Cabri (qualcuno potrebbe nuovamente, se lo ritenesse opportuno, esaltare l'osservazione introducendo le misure dei segmenti in cui i lati vengono divisi) ricordando in parallelo l'esperienza analoga per le bisettrici.
Ci troveremmo esattamente di fronte a ciò che abbiamo già vissuto: un problema di rapporti e la tentazione di far apparire triangoli simili.



Io credo che i passi precedenti possano portare a ipotizzare una relazione tra i segmenti evidenziati.
Con l'aiuto dell'insegnante (nasce qui il problema di orientare i segmenti come già sarebbe stato utile per il birapporto armonico) si può completare l'approfondimento che porta al Teorema di Ceva (pubblicato da Giovanni Ceva nel 1678):

Teorema di Ceva:

Dato un triangolo ABC e i punti D, E, F lungo i lati (vedi figura precedente), ***condizione necessaria e sufficiente*** *affinché AD, BE e CF si intersechino in uno stesso punto è che*

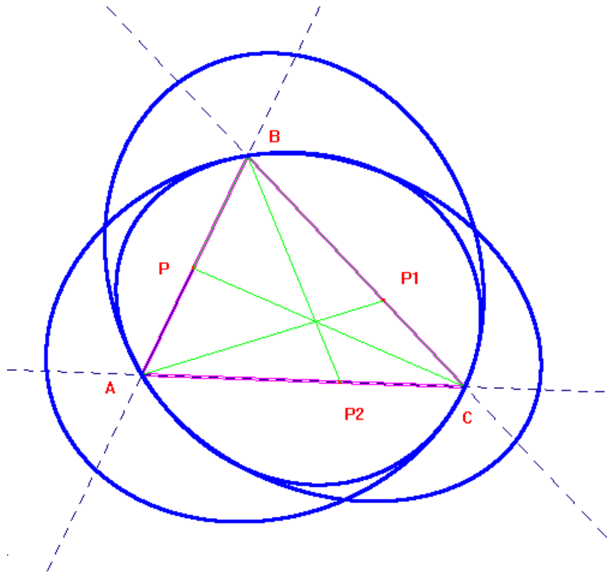
$$(BD/CD)\ (CE/AE)\ (AF/BF) = -1$$

Si è fatto un cambiamento di livello concettuale: alcune scoperte empiriche sono state dimostrate, sono divenute strumento concettuale ed evidenziano il percorso culturale fatto.

Ritornando al problema iniziale, la particolare configurazione dei punti P fa sì che essi dividano i lati del triangolo proprio in rapporti che soddisfano il teorema scoperto.

3. Di nuovo tutto sarebbe potuto finire qui, ma avendo memorizzato **una macro** per costruire le coniche, ho evidenziato le ellissi che hanno P e C come fuochi e A e B come punti ecc. ….

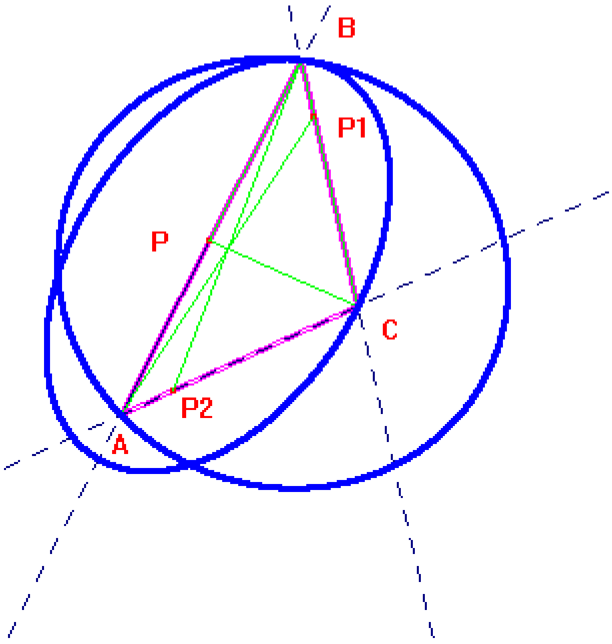
Automaticamente è risultato il disegno:



Suggestivo, ma che cosa mi suggerisce? Che a due a due le coniche sono tangenti? E le altre intersezioni?
I problemi che qui si potrebbero porre dipendono naturalmente dal livello scolastico nel quale si discute il problema.
Non facciamo ipotesi, sottintendendo che quasi sempre il lavoro può andare in direzioni diverse: **verificare la capacità di sfruttare alcune conoscenze già raggiunte o portare ad una nuova conoscenza, ma anche "camminare" fin dove sia possibile in alcune direzioni per mostrare, anche da lontano, l'ampiezza dei panorami oltre ai confini di conoscenza in cui ci troviamo.**

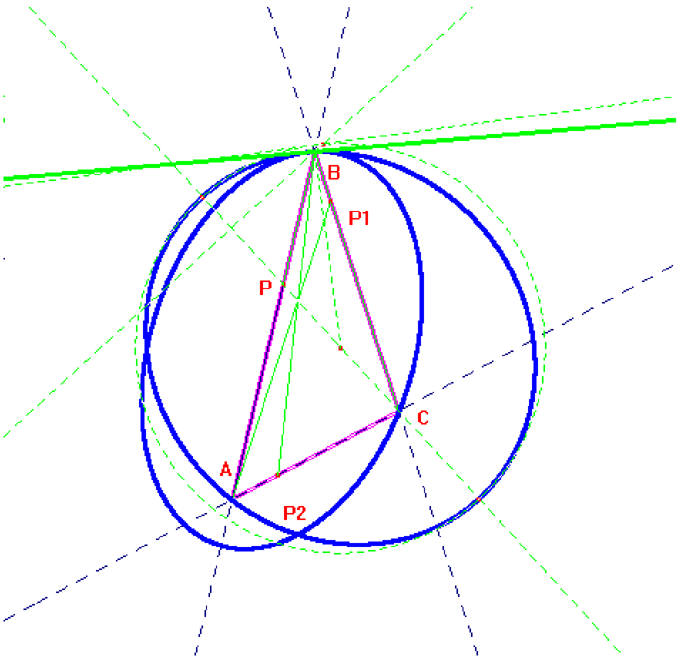
Ciò che va sottolineato è che la caratteristica di Cabri di fornire una grande variabilità di figure della stessa situazione dovrebbe essere sfruttata come prassi. A questo punto, ammesso di poter continuare, permette di porre la questione dell'intersezione di due ellissi.

"Produciamo" allora un disegno "diverso" e ci soffermiamo su di esso trascurando una conica per meglio vedere le cose:



Il disegno sarebbe coerente se davvero in B le due ellissi fossero tangenti.

Graficamente otteniamo subito il risultato (che naturalmente non ha alcun valore dimostrativo) e lo raggiungiamo sfruttando il birapporto armonico. Non ci dilunghiamo su questo punto perché ci porterebbe lontano e lasciamo immaginare tutta la serie di percorsi culturali che vi potremmo collegare.



A questo punto però nasce il problema della dimostrazione.
Essa riporta al teorema che in una conica a centro la tangente in un punto P è bisettrice di uno degli angoli formati dalle due rette che uniscono P ai fuochi. Nel nostro caso le due rette sono le stesse per entrambe le coniche.
Certamente la dimostrazione di questo teorema non è proponibile nella scuola superiore perché riporta ad una concatenazione di conoscenze troppo impegnative e quindi poco utili al lavoro scolastico.
Quello che però potrebbe diventare interessante, se in qualche caso fortunato si giungesse mai a parlare di polo e polare, sarebbe di sviluppare il discorso in un laboratorio parallelo alla fisica in cui in cui si parli di proprietà ottiche dei fuochi. Potrebbe divenire affascinante allora accostare l'itinerario matematico (senza dimostrazioni, direi) che da una conoscenza all'altra "costruisce" il sapere facendo mutare continuamente livello concettuale.

*Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica coordinato dal prof Mario Marchi, Università Cattolica del Sacro cuore, Brescia
maria.cantoni@tin.it